ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ЕСТЕСТВЕННО - НАУЧНАЯ ПОДГОТОВКА СПЕЦИАЛИСТОВ

С.Н. Мухина
кандидат педагогических наук
доцент кафедры высшей математики
БГАРФ ФГБОУ ВО « КГТУ»
svetlana_200@mail.ru

Использования методов математической обработки данных в научно-исследовательских работах студентов

Рассматривается важность использования методов математической обработки данных в научно-исследовательских работах студентов. Приведены фрагменты студенческих работ, посвященных использованию методов и способов математико-статистической обработки и анализа данных. Использование данных методов, несомненно, повысят практическую значимость и уровень научности работ студентов в будущих работах

Ключевые слова: научно-исследовательская работа студентов; статистическая культура; обработка и анализ результатов

Научно-исследовательская деятельность студентов – это процесс формирования будущего специалиста путем индивидуального получения новых научных знаний. Существует два вида научно-исследовательской деятельности студентов: деятельность в рамках учебного плана (курсовые работы, рефераты); деятельность, не входящая в программы обучения (конференции, олимпиады).

На кафедре высшей математики БГАРФ в рамках Межвузовской научно-технической конференции студентов и курсантов «Дни науки» ежегодно проводится работа секции математики. Основными задачами и результатами выполнения научно-исследовательских работ по математике являются: углубление теоретических знаний студентов и курсантов; овладение современными методами научного исследования; развитие у студентов и курсантов практических навыков самостоятельного поиска научно-технической информации; приобретение студентами и курсантами умения анализировать результаты проведенных исследований, формулировать выводы; формирование способности к самостоятельной, творческой, активной деятельности по непрерывному обновлению и обогащению научного багажа. Научно-исследовательскую работу студентов необходимо рассматривать как один из важнейших этапов подготовки студентов и курсантов к курсовому и дипломному проектированию, а также формированию научно-информационной базы для выполнения выпускной квалификационной работы.

В научно-исследовательской работе широко используются математико-статистические методы, которые активно применяются в технических исследованиях, экономике, теории и практике управления (менеджмента), в социологии, медицине, геологии, истории и т.д. С обработкой результатов наблюдений, измерений, испытаний, опытов, анализов имеют дело специалисты во всех отраслях практической деятельности, почти во всех областях научных исследований.

Статистика – это наука о том, как обрабатывать данные. Задача математической статистики состоит в создании методов сбора и обработки статистических данных для получения научных и практических выводов. Термин «статистика» произошел от латинских слов stato (государство) и status (положение вещей). В XVII веке под статистикой подразумевали «государствоведение» и «политическую арифметику». В современной педагогической литературе рассматриваются такие понятия как статистическая культура и статистическое мышление. Статистическая культура - совокупность статистических понятий, умений и навыков, способность отбора значимой и необходимой информации, способность к логической и целостной обработке данных, знание общих вопросов математической статистики, способность применять статистические методы на практике в ходе профессиональной деятельности. Статистическое мышление выражается в умении студентов правильно воспринимать, обрабатывать и оценивать массовые явления, носящие случайный характер [5].

Рассмотрим фрагменты студенческих работ, посвященных использованию методов и способов математико-статистической обработки и анализа данных.

Тема работы «Корреляционно-регрессионный анализ зависимости результатов экзамена по математике в сессию от баллов ЕГЭ и интенсивности самостоятельной работы в семестре». Работу выполняли студенты второго курса, обучающиеся по направлению «Экономика». Исследовалась учебная деятельность студентов одного потока, обучающихся по направлению «Экономика», сдавших три экзамена по математическим дисциплинам (одному преподавателю). Количество студентов – 35. Анализу подвергались следующие данные: результаты ЕГЭ по математике, показатель интенсивности самостоятельной работы в каждом семестре, результаты трех сессий (без учета пересдачи). Была поставлена цель - узнать, существует ли связь (если существует, то насколько тесная) между баллами ЕГЭ по математике, интенсивностью самостоятельной работы студента в течение семестра и успехами в освоении предмета.

План выполнения работы и основные выводы.

I. Изучить связь между баллами ЕГЭ по математике и успеваемостью.

1.1. Для анализа влияния результатов ЕГЭ по математике на успешное изучение курса математики собрать данные по трем семестрам.

2.1. Для оценки тесноты связи между двумя признаками X – количество баллов ЕГЭ,Y – оценка на экзамене в вузе рассчитать коэффициент ранговой корреляции Спирмена, значимость которого проверить по критерию Стьюдента на 5% уровне. Коэффициент ранговой корреляции Спирмена позволяет изучить связь между порядковыми переменными (измеренными в порядковой шкале).

3. Для дальнейшего анализа провести оценку модели: $Y = f(X)$, где Y – показатель успеваемости по математике в ВУЗе, а X – результаты ЕГЭ. Для этой цели обычно применяется линейный регрессионный анализ, который позволяет оценить, какую долю дисперсии зависимой переменной объясняют факторы и оценить индивидуальный вклад в предсказательную способность модели для каждого из них.

В нашем случае, оценка линейной зависимости с применением регрессионного анализа является адекватной потому, что сама система отбора абитуриентов предполагает наличие линейной связи между результатами ЕГЭ и способностями абитуриента к дальнейшему обучению. При приеме в вуз, абитуриенты ранжируются на основании баллов ЕГЭ, и предполагается, что более высокий балл означает лучший уровень подготовленности абитуриента. В качестве референтного значения ЕГЭ была принята его способность объяснять 15-25% дисперсии дальнейшей успеваемости (коэффициент детерминации в регрессионных моделях $R^2 \approx 0,15–0,25$), что является средней предсказательной способностью стандартизированных экзаменов SAT и ACT в США.

Баллы ЕГЭ переведены в пятибалльную систему оценивания по шкале:

27-46	47-64	65-100
3	4	5

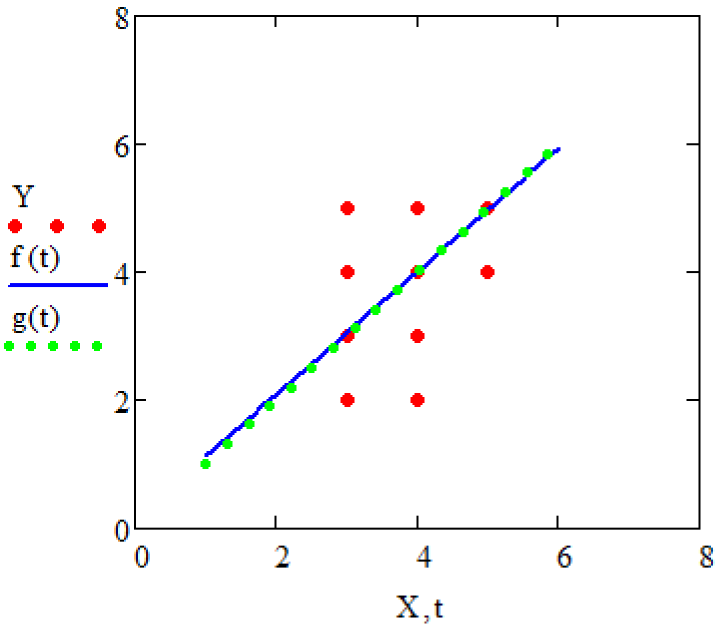
Исходные данные сгруппированы следующим образом:

Y / X	2	3	4	5
3	6	9	4	1
4	2	1	3	7
5	0	0	1	1

Для обработки данных использовали систему MathCAD. Фрагмент работы приведен на рисунке 1.

$$\mathrm{line}(X,Y) = \begin{pmatrix} 0.161 \\ 0.962 \end{pmatrix} \qquad f(t) := 0.161 + 0.962t \qquad t := 1, 1.1 .. 6$$

$$g(t) := t$$



$$r := \mathrm{corr}(X,Y) = 0.525 \qquad D := r^2 = 0.276$$

Рис. 1. Рассеяние: экзаменационный балл 1 семестр и балл ЕГЭ

Есть студенты, имеющие три балла по ЕГЭ, но при этом сдавшие экзамен пять, четыре и два и т.д. Из графика видно, что есть лишь малая доля студентов, получающих ту оценку на экзамене, которая совпадает с баллом по ЕГЭ.

Коэффициент детерминации говорит о том, что на 29 % успеваемость студента в первом семестре зависела от балла по ЕГЭ, а на остальные 71% успеваемость зависела от других, неучтённых факторов.

Аналогичный анализ был проведён по второму и третьему семестрам.

4.1. Выводы. Полученные данные демонстрируют, что успеваемость не имеет тесной связи с результатами ЕГЭ. Связь слабая, положительная. Ситуация во втором и третьем семестрах почти не отличается от ситуации в первом семестре. Во втором семестре успеваемость зависела от балла по ЕГЭ лишь на 26%, а в третьем семестре – на 37%, что может сигнализировать об усилении связи. Усиление связи в данном случае, на наш взгляд, имеет простое вероятное обоснование – отчисление неуспевающих студентов.

П. Связь успеваемости в вузе, баллами ЕГЭ и интенсивностью самостоятельной работы. Вводим новый фактор X2 – интенсивность самостоятельной работы. Статистический анализ для каждого семестра проведен по следующему плану.

2.1. Для составления уравнения множественной регрессии (двухфакторной линейной регрессии) вычислить оценки неизвестных коэффициентов с помощью алгоритма метода наименьших квадратов в форме обобщённого обращения матрицы. Проверить значимость полученного уравнения регрессии по критерию Фишера.

2.2. Объяснить смысл коэффициентов, входящих в уравнение регрессии.

2.3. Для сравнения отдельного влияния факторов на результат вычислить коэффициенты эластичности.

2.4. Вычислить множественный коэффициент корреляции и проверить его значимость по критерию Стьюдента.

2.5. Вычислить коэффициенты парной корреляции, проверить условие мультиколлениарности.

Фрагмент работы приведен на рисунке 2. X1 – балл ЕГЭ, X2 – интенсивность самостоятельной работы, Y – успеваемость студентов в 1-м семестре.

$\text{mean}(X2) = 3.571$

$n := 35$

$i := 0..n-1$

$a_i := 1$

$A := \text{augment}(a, X1, X2)$

$$\beta := \left(A^T \cdot A\right)^{-1} \cdot A^T \cdot Y = \begin{pmatrix} 0.217 \\ 0.01 \\ 0.793 \end{pmatrix}$$

$f(x1, x2) := 0.217 + 0.01 \cdot x1 + 0.793 \cdot x2$

A =

	0	1	2
0	1	56	5
1	1	63	5
2	1	36	3
3	1	36	3
4	1	36	5
5	1	44	2
6	1	48	2
7	1	44	2
8	1	36	2
9	1	63	5
10	1	40	3
11	1	44	3
12	1	24	3
13	1	40	3
14	1	63	5
15	1	40	4
16	1	36	...

$$OA := \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_i \left| \frac{Y_i - f(X1_i, X2_i)}{Y_i} \right| \right) \cdot 100$$

$OA = 14.078$

Рис. 2. Двухфакторная линейная регрессия (первый семестр)

Средний балл интенсивности самостоятельной работы в первом семестре равен 3,6 балла. Ошибка аппроксимации равна 14% и является допустимой.

Уравнение множественной регрессии показывает, что при увеличении только балла по ЕГЭ на 1 балл, успеваемость студента увеличивается в среднем на 0,01 балла, а при увеличении балла самостоятельной работы (при неизменном бале ЕГЭ) успеваемость увеличивается в среднем на 0,793 балла.

Сравнили раздельное влияние на успеваемость студентов двух факторов, для этого рассчитали коэффициенты эластичности (рисунок 3).

$$E1 := 0.01 \cdot \frac{mean(X1)}{mean(Y)} = 0.132$$

$$E2 := 0.793 \cdot \frac{mean(X2)}{mean(Y)} = 0.806$$

Рис. 3. Расчет коэффициентов эластичности

Рассчитали множественный коэффициент корреляции и проверили его значимость и значимость полученного уравнения регрессии (рисунок 4).

$$R := \sqrt{1 - \frac{\sum_i \left(Y_i - f\left(X1_i, X2_i\right)\right)^2}{n \cdot Var(Y)}} \qquad R = 0.872 \qquad R^2 = 0.761$$

Проверка значимости выборочного коэффициента корреляции (t-критерий Стьюдента)

$$tK := qt\left(1 - \frac{0.05}{2}, 35 - 2 - 1\right) = 2.037$$

$$tN := \frac{R \cdot \sqrt{35 - 2 - 1}}{1 - R^2} = 20.621$$

Проверка значимости уравнения регрессии (F-критерий Фишера)

$$FK := qF(1 - 0.05, 2, 35 - 2 - 1) = 3.295$$

$$FN := \frac{R^2 \cdot (35 - 2 - 1)}{1 - R^2} = 101.742$$

Рис. 4. Проверка значимости множественного коэффициента корреляции и уравнения регрессии

Значение $R = 0{,}872$, близкое к 1, указывает на тесную взаимосвязь переменной Y и факторов $X1$ и $X2$. Коэффициент детерминации $R^2 = 0{,}761$ свидетельствует о том, что вариация исследуемой зависимой переменной на 76% объясняется изменчивостью включенных в модель факторов.

Проверили значимость коэффициента корреляции. Наблюдаемое значение tN принадлежит критической области, следовательно, гипотезу о равенстве нулю коэффициента корреляции генеральной совокупности отвергаем.

Проверили значимость уравнения регрессии. Наблюдаемое значение FN принадлежит критической области, следовательно, гипотезу «уравнение регрессии ненадежно» отвергаем.

Исследована мультиколлинеарность (рисунок 5).

$$\mathrm{ryx1} := \mathrm{corr}(X1, Y) = 0.54$$
$$\mathrm{ryx2} := \mathrm{corr}(X2, Y) = 0.864$$
$$\mathrm{rx1x2} := \mathrm{corr}(X1, X2) = 0.543$$

Рис. 5. Расчет коэффициентов корреляции

Так как $r_{x1x2} = 0{,}543 < 0{,}8$, то явление мультиколлинеарности не установлено; $r_{yx1} = 0{,}54 > 0{,}8$; $r_{yx2} = 0{,}864 > 0{,}5$, следовательно, факторы не исключаются из модели.

Аналогично был проведён анализ успеваемости во втором и третьем семестрах, в зависимости от двух факторов. На основании проведенного исследования студенты сделали вывод: *одним из значимых факторов, влияющих на успешность учебной деятельности студентов, является интенсивность их самостоятельной работы*.

Студенты БГАРФ проводят исследования реальной жизни Калининградской области, отраженной в статистических данных социально-экономического развития Калининградской области. Тема исследовательской работы «Моделирование социальных процессов методами корреляционно-регрессионного анализа на примере Калининградской области». Целью исследовательской работы является изученными методами математической статистики провести анализ брачности и разводимости в Калининградской области.

План выполнения работы: собрать статистические данные; построить прогностические модели количества браков и разводов; построить множественные линейные регрессии для показателей брачности и разводимости; провести статистический анализ полученных результатов.

В ходе решения первой задачи собраны необходимые данные. Вторая задача исследования - прогнозировать дальнейшие возможные количества браков и разводов (на ближайшие пять лет). Для решения этой задачи методом наименьших квадратов в форме обобщенного обращения матрицы построены нелинейные однофакторные регрессионные модели в форме многочленов n-ой степени. Качество уравнений регрессии определено по величине средней ошибки аппроксимации. Построение регрессионных моделей проведено пакете Mathcad. На рисунке 6 приведен фрагмент работы для показателя брачнсти жителей Калининградской области.

$$i := 0..34 \quad n := 35 \quad i := 0..34$$
$$a_i := 1 \quad c_i := (N_i)^2 \quad d_i := (N_i)^3 \quad e_i := (N_i)^4$$
$$X := \mathrm{augment}(a, N, c, d, e) \quad \beta := \left(X^T \cdot X\right)^{-1} \cdot X^T \cdot B \quad t := 1, 1.1..35$$
$$f(t) := 10.295 + 0.836t - 0.156t^2 + 7.248 \cdot 10^{-3} \cdot t^3 - 1.007 \cdot 10^{-4} \cdot t^4$$
$$A := \frac{1}{35} \cdot \left(\sum_i \left|\frac{B_i - f(N_i)}{B_i}\right|\right) \cdot 100 = 4.354$$

Рис. 6. Реализация МНК в системе Mathcad

Графическое изображение количества зарегистрированных браков за период с 1981-2015 гг. по Калининградской области представлено на рисунке 7. Ошибка аппроксимации для коэффициента брачности составляет 4,35%, что меньше 12%, модель можно использовать полученную модель для определения коэффициента брачности в Калининградской области на ближайшие годы.

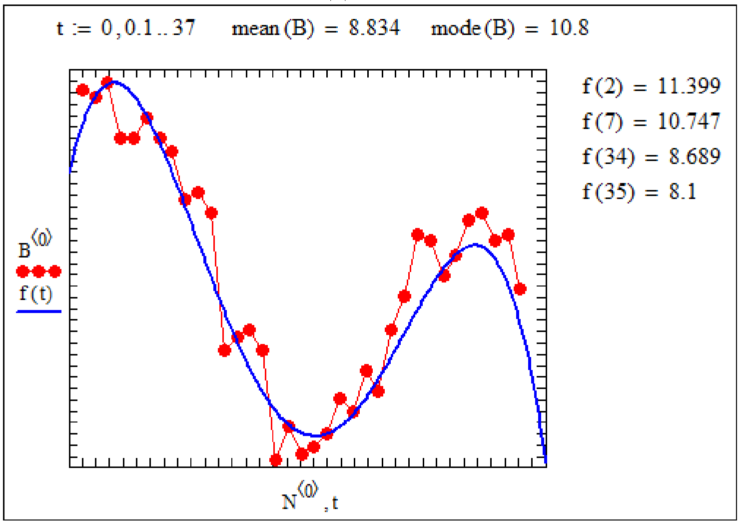


Рис. 7. Количество зарегистрированных браков за период с 1981-2015 гг.

Третья задача исследования. Проведен множественный регрессионный анализ для показателя – количество браков. Модель линейной регрессии имеет следующий вид

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n,$$

где – a_iкоэффициенты регрессии, x_n – влияющие переменные, n – число факторов.

В качестве влияющих факторов (после анализа уже имеющихся статистических исследований и соответствующей литературы) выбрали такие как: X1 – коэффициент умерших детей (до года), X2 – уровень алкоголизма, X3 – коэффициент родившихся детей, X4 – средняя заработная плата. Статистические данные в статье не приводятся. Результаты этого анализа приведены на рисунке 8.

$a_i := 1$ $A := \mathrm{augment}(a, X1, X2, X3$ $\beta := \left(A^T \cdot A\right)^{-1} \cdot A^T \cdot B$

$f(x1, x2, x3, x4) := 8.029 - 0.137 \cdot x1 - 2.301 \cdot x2 + 0.534 \cdot x3 - 1.105 \cdot 10^{-4} \cdot x4$

$$A := \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_i \left| \frac{B_i - f(X1_i, X2_i, X3_i, X4_i)}{B_i} \right| \right) \cdot 100 = 2.568$$

$E1 := -0.137 \cdot \frac{\mathrm{mean}(X1)}{\mathrm{mean}(B)} = -0.156$ $E3 := 0.534 \cdot \frac{\mathrm{mean}(X3)}{\mathrm{mean}(B)} = 0.67$

$E4 := -1.105 \cdot 10^{-4} \frac{\mathrm{mean}(X4)}{\mathrm{mean}(B)} = -0.18$ $E2 := -2.301 \cdot \frac{\mathrm{mean}(X2)}{\mathrm{mean}(B)} = -0.288$

Рис. 8. Построение множественной линейной регрессии для коэффициента брачности

Статистический анализ. Ошибка аппроксимации менее 3%. Уравнение множественной регрессии показывает, что при увеличении коэффициента умерших детей (до года) на 1 единицу (при неизменных факторах X2, X3 и X4), коэффициент брачности уменьшается в среднем на 0,137 единиц; при увеличении уровня алкоголизма на 1 единицу (остальные факторы без изменения), коэффициент брачности уменьшается на 2,3 единиц; увеличение коэффициента рождаемости на 1 единицу приводит к увеличению коэффициента брачности на 0,534 единиц; увеличение средней заработной платы на 1 тысячу рублей приводит к уменьшению коэффициента брачности в среднем на 0,0001 единиц. Сравнение раздельного влияния факторов на коэффициент брачности определим по коэффициентам эластичности Е. Результат представлен в таблице 1.

Таблица 1 – Влияние факторов на изучаемый признак

	увеличение фактора на 1%			
Фактор	X1	X2	X3	X4
коэффициент брачности	уменьшится на 0,15%	уменьшится на 0,29%	увеличится на 0,67%	уменьшится на 0,18%

Таким образом, на коэффициент брачности большее влияние оказывает фактор X3 (число родившихся детей), а также фактор X2 (уровень алкоголизма). Сводный коэффициент корреляции – 0,976, коэффициент детерминации – 0,952. Коэффициент брачности зависит на 95% от выбранных факторов и на 5% от других (неучтенных) факторов.

Исследована полученная модель на явление мультиколлинеарности. Наблюдается сильная связь между факторами, включенными в модель ($|r| > 0{,}8$). В свою очередь, между результирующим признаком и факторами парные коэффициенты ции$|r| > 0{,}5$. Явление мультиколлинеарности не установлено, что позволяет все факторы оставить в полученной модели.

Аналогичное исследование проведено для анализа коэффициента разводимости.

Сегодня математическая статистика – это базовая дисциплина высшего образования. Изучая теорию вероятностей и математическую статистику, углубляя эти знания в исследовательских работах, студенты овладевают приемами сбора, систематизации, анализа количественных данных, изображения их в графическом виде (полигоны, гистограммы, графики).

Все это является компонентами статистической грамотности студентов. Статистически мыслящий человек сумеет распознать внешние и внутренние причины изменчивости, устранить несоответствия и сделать процессы статистически управляемыми [4].

Литература

1. Демографический ежегодник «Калининградская область: социально-экономическое положение Калининградской области». – Калининград, 2015.

2. Сборник «Калининградская область в цифрах». - Калининград, 2015.

3. Статистический сборник «Труд и занятость в Калининградской области» - Калининград, 2015.

4. Сухинин С.А. Системообразующая роль статистики в социально-экономических исследованиях. Южно-Российский форум: экономика, политология, социология. – 2012 №1 (4). – с.138-152.

5. Чернова Ю.К. Формирование статистической культуры в процессе научно-исследовательской деятельности студенческого конструкторского бюро «качество». Тольяттинский государственный университет, Вектор науки ТГУ. № 4(7). 2009 - с.83-90.

С.Н. Мухина
кандидат педагогических наук
доцент кафедры высшей математики
БГАРФ ФГБОУ ВО «КГТУ»
svetlana_200@mail.ru

Методические основы подготовки студентов к внутривузовской олимпиаде по математике

Рассмотрена система проведения внутиривузовской математической олимпиады и подготовка к ней студентов и курсантов технического вуза. Приводится методика проведения семинарского занятия

Ключевые слова: математическая олимпиада; методика проведения занятий; методы и приемы решения нестандартных задач

Формирование личности специалиста осуществляется в рамках целостной педагогической системы, которая состоит из двух основных блоков. Это аудиторный учебный процесс и внеаудиторная учебная деятельность студентов. Формы и методы внеаудиторной работы разнообразны.

Одной из форм внеаудиторной работы является предметная олимпиада, которая в педагогической литературе рассматривается как один из важнейших факторов формирования профессиональных компетенций.

В главе 11, статье 77 Федерального закона Российской Федерации «Об образовании в Российской Федерации» указано, что в целях выявления и поддержки лиц, проявивших выдающиеся способности, организуются и проводятся олимпиады, направленные на выявление и развитие у обучающихся интеллектуальных и творческих способностей, интереса к научной (научно-исследовательской) деятельности, пропаганды научных знаний [1].

Вузовское олимпиадное движение можно рассматривать как продолжение школьного олимпиадного движения. В этом проявляется непрерывность и преемственность всей системы образования.

В Балтийской государственной академии рыбопромыслового флота на кафедре высшей математики возрождается замечательная традиция проведения математических олимпиад для студентов и курсантов 1-2 курсов. Команда БГАРФ второй год участвует в ежегодной межвузовской математической олимпиаде на базе филиала военно-морской академии им. Н.Г. Кузнецова в г. Калининграде.

Для проведения внутривузовской олимпиады проводятся семинары для студентов и курсантов младших курсов, на которых решаются и разбираются нестандартные задачи по изученным темам. Задачи подбираются таким образом, что в процессе их решения студенты и курсанты осваивают важные математические методы и приемы, выходящие за рамки общего курса. По каждой теме решаются ключевые (базовые задачи), затем переходят к решению олимпиадных задач. В семинарах участвуют все желающие студенты и курсанты.

Для проведения учебных семинаров на кафедре высшей математики БГАРФ формируется банк задач. Задачи подбираются по темам: линейная алгебра, аналитическая геометрия, комплексные числа, введение в анализ, дифференциальное и интегральное исчисления функции одной и многих переменных, ряды, теория вероятностей и математическая статистика. При составлении вариантов для проведения внутривузовской олимпиады из каждого раздела берутся 1-2 задачи, что соответствует структуре межвузовских и всероссийский олимпиад для студентов технических вузов, проводимых в последние десять лет. Ограничений на участие в олимпиаде нет. Апелляция не проводится, так как преподаватели кафедры заинтересованы в наборе сильной команды для дальнейшего участия в межвузовской математической олимпиаде. В команду могут быть включены и победители прошлогодней олимпиады.

Приведем пример проведения семинарского занятия по аналитической геометрии. Предлагается задача. Даны эллипс и прямая

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad y=kx+m.$$

Определить при каком условии прямая касается эллипса, пересекает его, проходит вне его.

Составим систему из двух уравнений и исключим y из первого уравнения:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ y=kx+m\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \frac{b^2}{a^2}x^2=b^2-(kx+m)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2(b^2+a^2k^2)+2kma^2x+(a^2m^2-a^2b^2)=0$$

Так как $b^2+a^2k^2\neq 0$, то имеем квадратное уравнение при любых значениях параметров, дискриминант которого равен

$$D=4a^2b^2(b^2+a^2k^2-m^2),\ \ a\neq 0,\qquad b\neq 0.$$

$D=0\Rightarrow m^2=b^2+a^2k^2$ – условие касания прямой и эллипса;

$D>0\Rightarrow m^2<b^2+a^2k^2$ – условие пересечения прямой и эллипса;

$D<0\Rightarrow m^2>b^2+a^2k^2$ – прямая проходит вне эллипса.

Аналогично студентами самостоятельно исследованы взаимные расположения прямой и гиперболы, прямой и параболы. Результат оформляется в справочную таблицу.

Таблица 1.

Условия касания прямой y = kx + m с кривыми 2-го порядка

кривая	**условие**
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$m^2=a^2k^2+b^2$
$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$m^2=a^2k^2-b^2$
$y^2=2px$ $x^2=2py\ \ (x=ky+m)$	$p=2km$

Рассматриваем применение полученного теоретического материала к решению олимпиадных задач. Оригинальный текст задач взят из сборника под редакцией Берковича Ф.Д. [2].

Задача 1. *При каких значениях параметра а система*

$$\begin{cases}x^2+y^2<2,\\ x+y<a\end{cases}$$

не имеет решений. Дать геометрическую интерпретацию.

Переформулируем условие задачи: *при каких значениях параметра а прямая*

$y=-x+a$ является касательной к окружности?

1 способ. Угловой коэффициент касательной равен (-1). Найдем точку касания.

$$2x+2yy'=0 \Rightarrow y'=-\frac{x}{y}=-1 \Rightarrow x=y \Rightarrow x^2+x^2=2 \Rightarrow x=\pm 1.$$

$$M(-1;-1) \Rightarrow a=-2; \quad M(1;1) \Rightarrow a=2.$$

Из геометрических соображений (рисунок 1) $a \in (-\infty;-2]$.

2 способ. Из условия касания эллипса и прямой

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=1, \qquad y=-x+a$$

имеем:

$2\cdot 1+2\cdot 1=a^2 \Rightarrow a=\pm 2.$

Из геометрических соображений $a \in (-\infty;-2]$.

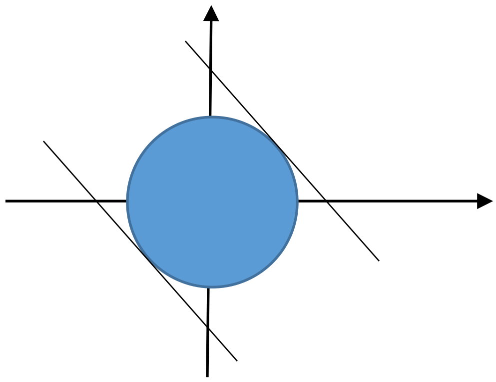


Рис. 1 – к задаче 1

Задача 2. *Числа x и y удовлетворяют условиям $x^2 \le y \le 4+\sqrt{4-x^2}$. Какие значения может принимать сумма $u=3x+4y$?*

Составим систему неравенств

$$\begin{cases} y \ge x^2 \\ y \le 4+\sqrt{4-x^2} \end{cases}$$

Графическое решение системы неравенств представлено на рисунке 2.

Решение – часть плоскости, ограниченная параболой

$$y=x^2$$

и окружностью

$x^2+(y-4)^2=4.$

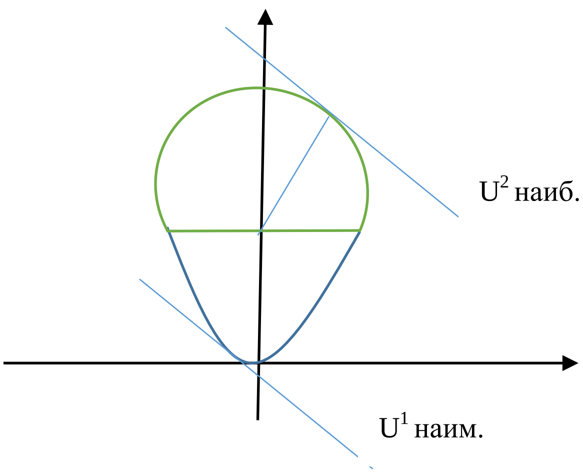


Рис. 2 – к задаче 2

$u^1_{\text{наим}}$ – касательная к параболе.
Из условия касания прямой и параболы находим

$$\begin{cases} x = -\frac{4}{3}y + \frac{u^1}{3} \\ x^2 = y, \ \ p = 1/2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} = 2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{u^1}{3} \Rightarrow u^1 = -\frac{9}{16}.$$

$u^2_{\text{наиб}}$ – касательная к окружности.
Или расстояние от точки (0;4) до прямой
$3x + 4y - u^2 = 0,$
которое равно 2.
Получено

$$u^2 = 26.$$

Окончательно,

$$-\frac{9}{16} \le 3x + 4y \le 26.$$

На занятии рассмотрены олимпиадные задачи, которые можно решить с помощью свойств скалярного произведения векторов. Выявлены характерные особенности в решении задач, к которым применим данный метод. Главная трудность в использовании этого метода заключается в выборе координат векторов. Нужно выбрать координаты векторов $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2\}$ так, чтобы уравнение приняло вид
$x_1x_2 + y_1y_2 = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2}\sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2}$.

На примере простого уравнения разбираем алгоритм применения нового метода.

Задача 3. *Решить уравнение* $\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} = 2$.

Пусть $\vec{a}$ =($\sqrt{x-1}$; $\sqrt{3-x}$) и $\vec{b}$ =(1;1). Тогда длины векторов
$\overrightarrow{|a|}$=$\sqrt{x-1+3-x}$=$\sqrt{2}$, $|\vec{b}|$=$\sqrt{1^2+1^2}$=$\sqrt{2}$.
Скалярное произведение векторов в координатной форме

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot \sqrt{x-2} + 1 \cdot \sqrt{4-x} = 2(\text{ по условию}).$$

С другой стороны, по определению: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos a = 2$,
следовательно, $\cos \alpha = 1 \Leftrightarrow$ векторы коллинеарные, их одноимённые координаты пропорциональны:
$\frac{\sqrt{x-2}}{1} = \frac{\sqrt{4-x}}{1}$ или $\sqrt{x-2} = \sqrt{4-x}$. Ответ: x=3.

Усложняем условие задачи. Рассматриваем решение особого класса задач – задачи с параметрами.

Задача 4**.** *При всех значениях параметра* a *решить уравнение*
$\sqrt{a+1} \cdot \sqrt{x-a} + \sqrt{2a-x} = \sqrt{a(a+2)}$.

ОДЗ (для параметра a): $a \ge 0$.
Пусть $\vec{m}(\sqrt{a+1}; 1)$ и $\vec{n}\left(\sqrt{x-a}; \sqrt{2a-x}\right)$.

$\vec{m}\cdot\vec{n}=\sqrt{a+1}\cdot\sqrt{x-a}+\sqrt{2a-x}$; $|\vec{m}|=\sqrt{a+2}$; $|\vec{n}|=\sqrt{a}$.
Т.к. $\vec{m}\cdot\vec{n}\le|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|$, то $\sqrt{a+1}\cdot\sqrt{x-a}+\sqrt{2a-x}\le\sqrt{a(a+2)}$.
Равенство возможно, если $\vec{m}\uparrow\uparrow\vec{n}$, т.е.
$\frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{x-a}}=\frac{1}{\sqrt{2a-x}}$.
При $a=0$ исходное уравнение имеет единственный корень $x=0$.
Решая уравнение, получим $x(a+2)=a^2+3a$, откуда
$x=\frac{a^2+3a}{a+2}$.
Ответ: при $a\ge0$ $x=\frac{a^2+3a}{a+2}$; при $a<0$ уравнение корней не имеет.
Некоторые задачи, сходные по содержанию, решаются разными методами. Разбираем решение двух задач, содержание которых одинаково.

Задача 5. *Числа x и y таковы, что*

$$y^2-4x^2+16=0.$$

Какие значения может принимать сумма

$$4x+y?$$

$$4x+y=m\Rightarrow y=-4x+m$$

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1\Rightarrow \text{гипербола}$$

Из условия касания прямой и гиперболы

$$m^2=k^2a^2-b^2\Rightarrow m^2=48$$

$$y=-4x\pm\sqrt{48}$$

$$m\in\left(-\infty;\ \sqrt{48}\right]\cup[\sqrt{48};+\infty)$$

Задача 6. *Числа x, y, z таковы, что*

$$x^2+4y^2+z^2=3.$$

Какие значения может принимать сумма

$$x+2y+z?$$

$$\vec{a}=(x;2y;z)\Rightarrow|\vec{a}|=\sqrt{x^2+4y^2+z^2}=\sqrt{3}$$

$$\vec{b}=(1;1;1)\Rightarrow\left|\vec{b}\right|=\sqrt{3}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x+2y+z=\sqrt{3}\sqrt{3}\cos\alpha$$

$$-3\le x+2y+z\le3$$

Подводя итог занятию, делаем вывод, что несмотря на уникальность олимпиадных задач можно выделить несколько часто используемых идей. Не существует единого метода решения олимпиадных задач. Некоторые можно решать несколькими различными методами или комбинацией методов.
Работа по подготовке и проведению внутривузовской математической олимпиады на кафедре продолжается. Необходимо совершенствовать методику подготовки и проведения математической олимпиады. Рассматривать олимпиаду как непрерывное учебно-методическое мероприятие, способствующее развитию математических способностей курсантов и студентов, формирующее потребность в непрерывном расширении и углублении своих математических знаний.

Одной из основных задач олимпиады по математике в Балтийской государственной академии является формирование позитивного отношения курсантов и студентов к предмету, активизация научного творчества, применение математических методов и приемов в работе над исследовательскими проектами.

Литература

1. http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_158429/
2. Беркович Ф.Д. Задачи студенческих математических олимпиад. Учебное пособие. /Ф.Д. Беркович, В.С. Федий, В.И. Шлыков. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2008. - 437 с.