

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ЕСТЕСТВЕННО – НАУЧНАЯ ПОДГОТОВКА СПЕЦИАЛИСТОВ

А.А. Зайцев
доктор педагогических наук,
профессор, заведующий кафедрой
физической культуры
Калининградского государственного
технического университета
aaz39@rambler.ru

А.А. Васюкевич
старший преподаватель кафедры
физической культуры
Калининградского государственного
технического университета
aaz39@rambler.ru

Б.В. Сорока
старший преподаватель кафедры
физической культуры
Калининградского государственного
технического университета
aaz39@rambler.ru

Способ расчета вестибулярной нагрузки в упражнениях профессионально-прикладной физической и спортивной подготовки

Предлагается формула для расчета количественного показателя вестибулярной нагрузки при выполнении физических упражнений

Ключевые слова: профессионально-прикладная подготовка; физические упражнения; вестибулярный анализатор; ускорение; нагрузка

Анализ результатов исследований, проведенных в нашей стране и за рубежом, показал, что на переносимость человеком ускорений влияют: величина время и направление действия ускорения. Все эти показатели и определяют величину вестибулярной нагрузки.

При расчете абсолютной нагрузки необходимо учитывать одновременно параметры ускорений при вращательных, поступательных и смешанных перемещениях, что достаточно сложно. Поэтому целесообразно все виды ускорений привести к относительным единицам, т.е. к безразмерным величинам. Это дает возможность, во-первых, сравнить между собой

величины нагрузки, получаемые при различных ускорениях, действующих на человека; во-вторых, выделить единый эквивалент полученной нагрузки; в-третьих, позволит учитывать и дозировать вестибулярные нагрузки в зависимости от поставленных задач.

В авиации и судостроении существует термин "перегрузка". Перегрузками называют отношения ускорений, возникающих в полете или при движении по волнам, к ускорению силы тяжести. При такой формулировке перегрузка - величина безразмерная, ибо в самом определении содержатся сведения об эталоне, употребляемом для вычисления ее величины. В спортивной и оздоровительной практике часто прибегают к сопоставлению показателей на основе расчетов различных индексов (весоростовой и т.п.).

В обычных условиях на человека действуют сила тяжести и сила реакции опоры. При отсутствии ускорений эти силы равны и противоположно направлены. Во время поступательного или вращательного движений возникают либо "перегрузки", либо "недогрузки". Учитывая, что и то, и другое для организма является стимулом, вызывающим всевозможные реакции, зачастую одинакового характера, отношение величины ускорений в перемещениях к величине ускорения силы тяжести будем в любом случае называть перегрузкой.

Для вывода общей формулы расчета вестибулярной нагрузки, действующей на человека в процессе перемещений, установим две системы координат. Первая - подвижная $GXYZ$ имеет начало (G) в центре тяжести головы. Ось GX направлена в сторону лица, т.е. вперед; ось GY влево; ось GZ вверх к темени. В покое, т.е. когда не совершается перемещения человека в пространстве, GX и GY лежат в горизонтальной плоскости GXY , а ось GZ вертикальна (рис. 1).

Вторая неподвижная система координат $O\xi\alpha\zeta$ сохраняет свое положение в пространстве при любых перемещениях подвижной системы и имеет начало в проекции центра тяжести на опору.

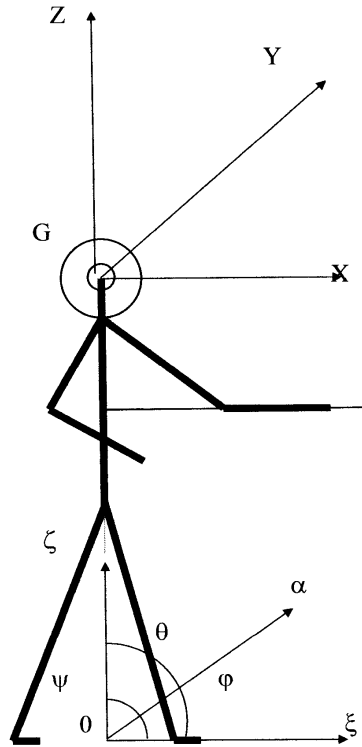


Рис.1. Расположение систем координат для общей характеристики вестибулярной нагрузки

Положение головы в пространстве во время перемещений в любой момент времени можно охарактеризовать тремя координатами ее центра тяжести: ξ_g , α_g , ζ_g и тремя так называемыми эйлеровыми углами.

Предложенная С.Н. Благовещенским система эйлеровых углов практически совпадает с углами наклонов головы к правому-левому плечу - θ , вперед-назад - ψ и поворотах головы вправо-влево - φ .

Во время сложного перемещения на человека действуют следующие виды ускорений, требующие учета при расчете перегрузки:

1. Линейные.
2. Угловые.
3. Вращательное движение порождает тангенциальное и центробежное ускорения.
4. Вращательное движение с одновременным поступательным движением является причиной ускорения Кориолиса.

Линейные ускорения определяются как вторые производные соответствующих координат вестибулярного аппарата (лабиринтов) по времени:

$$\ddot{\xi} = \frac{d^2 \xi}{dt^2}; \quad \ddot{\alpha} = \frac{d^2 \alpha}{dt^2}; \quad \ddot{\zeta} = \frac{d^2 \zeta}{dt^2}. \quad (1)$$

Угловые ускорения a_i :

$$\ddot{\Theta} = \frac{d^2\Theta}{dt^2}; \quad \ddot{\Psi} = \frac{d^2\Psi}{dt^2}; \quad \ddot{\phi} = \frac{d^2\phi}{dt^2}. \quad (2)$$

Тангенциальные ускорения:

$$\begin{aligned} \vec{a}_\tau &= \vec{\varepsilon} \times \vec{r}; \quad \vec{\varepsilon} = \vec{\varphi}; \quad \vec{\varphi}(\Theta, \Psi, \phi); \\ a_{\tau x} &= z\varepsilon_y - y\varepsilon_z; \quad a_{\tau y} = x\varepsilon_z - z\varepsilon_x; \quad a_{\tau z} = y\varepsilon_x - x\varepsilon_y; \\ \varepsilon_x &= \ddot{\Theta}, \quad ; \quad \varepsilon_y = \ddot{\Psi}, \quad ; \quad \varepsilon_z = \ddot{\phi}. \end{aligned} \quad (3)$$

Центробежные ускорения: $\vec{a}_n = \omega^2 \vec{r}$;

$$\vec{a}_n = -\vec{\omega}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\vec{\omega}(\vec{\omega} \times \vec{r}) + \omega^2 \vec{r}, ;$$

$$\begin{aligned} a_{nx} &= \omega^2 x - \omega_x(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z); \\ a_{ny} &= \omega^2 y - \omega_y(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z); \\ a_{nz} &= \omega^2 z - \omega_z(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z); \end{aligned} \quad (4)$$

где $\omega_x = \dot{\Theta}_2$, ; $\omega_y = \dot{\Psi}_2$, ; $\omega_z = \dot{\phi}_2$, ;

$$\omega^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2.$$

Ускорения Кориолиса: $\vec{a}_{кор} = 2(\vec{\omega} \times \vec{V})$;

$$a_{кор.x} = 2(\dot{z}\dot{\Psi} - \dot{y}\dot{\Psi}); \quad a_{кор.y} = 2(\dot{x}\dot{\phi} - \dot{z}\dot{\Theta}); \quad a_{кор.z} = 2(\dot{y}\dot{\Theta} - \dot{x}\dot{\Psi}). \quad (5)$$

Суммарная величина всех ускорений, действующих на лабиринты, выводится следующим образом:

$$\begin{aligned} W_x &= \ddot{\xi} + z\ddot{\Psi} - y\ddot{\phi} + (\dot{\phi}^2 + \dot{\Psi}^2)x - \dot{\Theta}(\dot{\Psi}y + \dot{\phi}z) + 2(\dot{z}\dot{\Psi} - \dot{y}\dot{\phi}); \\ W_y &= \ddot{\alpha} + x\ddot{\phi} - z\ddot{\Theta} + (\dot{\phi}^2 + \dot{\Theta}^2)y - \dot{\Psi}(\dot{\Theta}z + \dot{\phi}x) + 2(\dot{x}\dot{\phi} - \dot{z}\dot{\Theta}); \\ W_z &= \ddot{\xi} + y\ddot{\Theta} - x\ddot{\Psi} + (\dot{\Psi}^2 + \dot{\Theta}^2)z - \dot{\phi}(\dot{\Theta}x + \dot{\Psi}z) + 2(\dot{y}\dot{\Theta} - \dot{x}\dot{\Psi}) + g. \end{aligned} \quad (6)$$

По правилу геометрического сложения проекций вектора на прямоугольные оси координат абсолютная величина полного ускорения будет равна:

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}. \quad (7)$$

Перегрузка определяется как отношение полного ускорения к ускорению свободного падения.

$$\eta = \frac{\sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}}{g}. \quad (8)$$

Формулы (6), (8) содержат мгновенные значения угловых и линейных скоростей и ускорений, измерение которых возможно, но является сложной задачей. При практическом применении формул (6) используем для линейных и угловых ускорений простейшие формулы из теории равноускоренного движения и определим отдельные составляющие их через величины, поддающиеся измерению в обычных условиях, т.е. расстояния и углы.

$$\begin{aligned}
 \ddot{\xi} &= \frac{2\Delta\xi}{t^2}, & \ddot{\alpha} &= \frac{2\Delta\alpha}{t^2}, & \ddot{\zeta} &= \frac{2\Delta\zeta}{t^2}, ; \\
 \ddot{\varphi} &= \frac{2\Delta\varphi}{t^2}, & \ddot{\psi} &= \frac{2\Delta\psi}{t^2}, & \ddot{\Theta} &= \frac{2\Delta\Theta}{t^2}, ; \\
 \dot{x} &= \frac{2\Delta x}{t}, & \dot{y} &= \frac{2\Delta y}{t}, & \dot{z} &= \frac{2\Delta z}{t}, ; \\
 \dot{\varphi} &= \frac{2\Delta\varphi}{t}, & \dot{\psi} &= \frac{2\Delta\psi}{t}, & \dot{\Theta} &= \frac{2\Delta\Theta}{t}.
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Формулы (6 и 9) используются при расчете нагрузки в зависимости от характера поступательного и вращательного движений. Рассмотрим возможные варианты.

Вариант 1. Поступательное и вращательное движения неравномерны.

В данном варианте в формулах (6) используются все замены, приведенные в выражениях (9).

Вариант 2. Поступательное движение неравномерно, вращательное равномерно.

В этом случае $\ddot{\xi}, \ddot{\alpha}, \ddot{\zeta}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ - остаются без изменений, а $\ddot{\varphi} = \ddot{\psi} = \ddot{\Theta} = 0$,

$$\dot{\varphi} = \frac{\Delta\varphi}{t}, ; \quad \dot{\psi} = \frac{\Delta\psi}{t}, ; \quad \dot{\Theta} = \frac{\Delta\Theta}{t}.$$

Вариант 3. Поступательное движение равномерно, вращательное - неравномерно.

Здесь $\ddot{\xi} = \ddot{\alpha} = \ddot{\zeta} = 0, ; \quad \dot{x} = \frac{\Delta x}{t}, ; \quad \dot{y} = \frac{\Delta y}{t}, \quad \dot{z} = \frac{\Delta z}{t}$, остальные переменные без изменений.

Вариант 4. Поступательное и вращательное движения равномерны.

Тогда $\dot{x} = \frac{\Delta x}{t}, ; \quad \dot{y} = \frac{\Delta y}{t}, ; \quad \dot{z} = \frac{\Delta z}{t}, ; \quad \dot{\varphi} = \frac{\Delta\varphi}{t}, ; \quad \dot{\psi} = \frac{\Delta\psi}{t}, ; \quad \dot{\Theta} = \frac{\Delta\Theta}{t}$, остальные переменные равны нулю.

Рассмотренные варианты расчета перегрузок в различных условиях движения представлены в табл. 1.

Характеристика переменных в зависимости от характера и условий перемещений

Перемещение		Переменные											
Характер	Условия
1.Вращательное Поступательное	Неравномерное Неравномерное												
2.Вращательное Поступательное	Равномерное Неравномерное										φ	ψ	θ
3.Вращательное Поступательное	Неравномерное Равномерное							\underline{x}	\underline{y}	\underline{z}			
4.Вращательное Поступательное	Равномерное Равномерное							\underline{x}	\underline{y}	\underline{z}	φ	ψ	θ

где ψ - угол наклона в сагиттальной плоскости (вперед - назад), (рад);

θ - угол наклона во фронтальной плоскости (влево - вправо), (рад);

φ - угол поворота в горизонтальной плоскости (налево - направо), (рад);

ξ - смещение в направлении вверх - вниз (м); α - смещение в направлении влево - вправо (м); ζ - смещение в направлении вперед - назад (м);

x, y, z - изменение координат вестибулярного анализатора в системе координат GXYZ (подвижной) (м).

Определение знака каждого угла производится по схеме, приведенной на рис. 2.

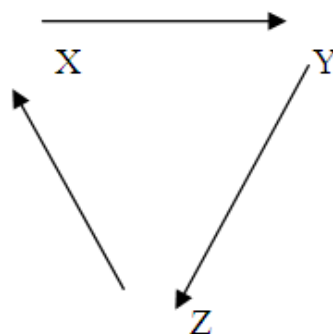


Рис. 2. Схема определения знака угла поворота

Стрелка показывает направление вращения, при котором угол положительный.

Рассмотрим примеры расчета вестибулярной нагрузки.

ПРИМЕР 1. Определить величину перегрузки при вращении человека вокруг вертикальной оси со скоростью 1об в секунду. Ось вращения проходит через центр тяжести головы, голова прямо. Вращение равномерное, поступательного движения нет.

Для случая "А" формулу (9) можно упростить за счет установления количественных характеристик координат лабиринтов в подвижной системе координат:

$x = 0, z = 0$, так как эти координаты не изменяются в процессе вращения;

$y = 1/2 H$, где H - половина ширины головы, именно эта координата будет радиусом вращения для лабиринтов.

Анатомы установили, что ширина и длина черепа у людей неодинаковы. У нормального человека (мезоцифала) головной индекс составляет 75-80 % [1,2]. При этом ширина головы взрослого человека колеблется в пределах от 17 до 19 см. Значит, если ширина головы 18 см, то расстояние до оси вращения будет равно 0.09 м. Колебание ее в пределах $\pm 0,02$ м не существенны. К аналогичным данным можно придти, проанализировав данные окружности головы взрослых людей, которые колеблются в пределах 53-61см [2]. Расчет координаты Y , т.е. радиуса, при окружности головы 58 см показывает, что $r = Y = 0,09 \pm 0,02$ м.

Для детей и лиц, моложе 20 лет, величина координаты Y будет меньше, так как за время роста черепа наблюдаются три периода: первый (первые 7 лет) - характеризуется интенсивным ростом преимущественно за счет заднего отдела, второй (от 7 лет до начала полового созревания) - период относительного покоя, третий (14-16 лет) - до окончательного роста скелета (20-23 года) - снова период усиленного роста за счет переднего отдела. Поэтому будет целесообразным вычислить средние координаты Y для указанных возрастных групп: 1-7 лет - 0.07 м; 8 -13 лет - 0,08 м; 14 - 20 лет - 0,09 м; более 21 года - 0,09 м.

Исходя из вышеприведенных расчетов, можно установить, что координату y при определении перегрузки в формуле (6) можно принять за 0.09 м для всех возрастов.

Для взрослого человека ростом 180 см перегрузка будет рассчитываться по формуле:

$$W = \frac{\sqrt{g^2 + 21,9}}{t^2}. \quad (10)$$

Из формулы видно, что перегрузка в данном примере будет зависеть только от времени выполнения полного оборота. Так при $t = 2$ с $\eta = 1.03$, при $t=1$ с $\eta = 1.11$, при $t=0.5$ с $\eta = 1.38$.

ПРИМЕР 2. Определить величину перегрузки при вращении человека вокруг вертикальной оси со скоростью 1 об в секунду и продвижением вперед на 1 м. Голова и шея наклонена вперед на угол 90° . Вращение равномерное, а поступательное движение неравномерное.

При решении этого примера определим все координаты: $x = 0.2$ м (высота головы - радиус вращения); $y = 0.09$ м (половина ширины головы); $z = 0$; $\xi = 1$ м; $\psi = \alpha = \zeta = \theta = 0$; $\varphi = 6.28$ рад. Установим переменные согласно табл. 1 и проведем вычисления. При $t=2$ с $\eta = 1.38$, при $t = 1$ с $\eta = 3.98$.

ПРИМЕР 3. Определить величину перегрузки при выполнении теста на тренажере "Вертикаль" вращение в висе в положении - голова наклонена назад на 60° .

Решая данный пример, определяем, что вращение и поступательное движение на тренажере неравномерные. Координаты: $x = 0.15$ (радиус вращения), $y = 0.09$, $z = 0$. Угол поворота в горизонтальной плоскости равен $62,8$ рад (10 об). Остальные переменные равны нулю. Проведем соответствующие вычисления. При $t = 10$ с перегрузка составит 1.76, при увеличении скорости вращения, т.е. $t = 8$ с, перегрузка будет равна 2,47.

Анализ данных показывает, что при составлении программ тренировки устойчивости к воздействию различного рода ускорений преподаватель/тренер каждое упражнение оценивает в величинах вестибулярной нагрузки, и, зная данные о реактивности организма на нее, устанавливает их порядок, планирует паузы отдыха между упражнениями, моделирует условия деятельности. Так для тренировки к условиям постоянных перегрузок целесообразно выбирать упражнения с вращениями вокруг вертикальной оси. Варьируя радиус вращения и положение головы и туловища, можно моделировать условия деятельности с перегрузкой аналогичной как по величине, так и направлению. Если перегрузки в практической деятельности варьируют относительно условной единицы, то в качестве средств тренировки следует использовать вращения в сагиттальной и фронтальной плоскостях. При этом амплитуда колебаний перегрузок будет зависеть от длительности заданного вращения. Чем оно быстрее, тем больше колебания.

Выбор тестов для оценки вестибулярной устойчивости следует вести из соответствия нагрузки в них реальным условиям деятельности. Например, во время качки на корабле на организм действуют вестибулярные нагрузки как меньше, так и больше единицы, т. е. имеют место и недогрузки, и перегрузки. Следовательно, в качестве тестов целесообразно применять вращения либо в сагиттальной, либо во фронтальной плоскостях. Вращательные пробы в горизонтальной плоскости, как было показано выше, имитируют только перегрузки, а укачивание на качелях моделирует в большей мере недогрузки.

Проведенные теоретические и экспериментальные исследования позволили классифицировать вестибулярные нагрузки по ряду признаков (табл. 2).

Таблица 2

Классификация вестибулярных нагрузок

Классификационный признак	Классификация	Количественные показатели
Отношение к силе тяжести	Недогрузка	< 0.85
	Нейтральные	0.85 - 1.15
	Перегрузка	> 1.15
Специфичность	Общая	0.85 - 1.15
	Специальная	< 0.85 и > 1.15

Из табл. 2 видно, что если стоит задача повышения общей вестибулярной устойчивости или выносливости, то подбор упражнений можно осуществлять на основе выделения упражнений с большими нагрузками.

С другой стороны, если исследователь эмпирически нашел эффективные комплексы специальных упражнений, он может их выразить в показателях перегрузок и совершенствовать их, регулируя количественные показатели нагрузок.

Ценность расчетного показателя вестибулярной нагрузки состоит в стандартизации вестибулярных проб при медико-биологических и педагогических исследованиях.

Литература

1. Биология человека / Дж. Харрисон, Дж. Уайлер, Дж. Таннер, Н. Барникот. – М., 1968. – 440 с.
2. Учебник нормальной анатомии/ Н.К.Лысенко, В.И. Бушкевич, М.Г. Привес. - М.: Медгиз, 1958. – 560 с.

Е.Е. Алексеева

кандидат педагогических наук

доцент кафедры высшей математики БГАРФ

Public_barankin@mail.ru

Некоторые методические вопросы использования степенных рядов в интегрировании функций

Описано использование подстановки $x=1/y$ с последующим применением ряда Маклорена для новой переменной y , получены степенные ряды, адекватно воспроизводящие первообразную функцию во всей области её существования. Ранее отсутствие таких разложений в ряд Тейлора не давало возможности получить интегралы от этих функций.

Ключевые слова: интеграл; интегрирование; ряд; степенной ряд; метод композиций

Интегрирование функции в квадратурах является наиболее трудной задачей математического анализа.

Последним средством вычисления неберущегося интеграла является разложение подинтегральной функции в степенной ряд с последующим вычислением интеграла от этого ряда. Конечно, решение в форме бесконечного ряда слагаемых менее удобно для использования. Необходим дополнительный анализ количества потребных слагаемых для обеспечения заданной точности. Тем не менее, ряды Тейлора часто становятся единственной возможностью аналитического решения интеграла. Именно по этой причине трудно переоценить роль рядов Тейлора в математическом анализе.

Имеются, однако, такие функции, применительно к которым в своё время были обнаружены неадекватности рядов Маклорена (частный случай ряда Тейлора). К числу таких функций относятся функции, зависящие от величины обратной аргументу $1/x$. Эти же функции представляют особые трудности при их интегрировании. Впервые такие трудности подметил ещё Коши. В качестве примера он приводил функцию вида $f(x) = e^{-1/x^2}$.

Отмечалось [1, с.158], что разложение в ряд Маклорена этой функции имеет радиус сходимости $R = \infty$, но сумма его есть тождественный нуль и, ни в какой точке, кроме нуля, не равна $f(x)$. Такой неадекватный характер получающегося ряда [1, с.176] объяснялся не аналитическим характером функции $f(x)$, в точке $x_0 = 0$.

На самом деле причина такой неадекватности кроется не в характере функции, а в нарушении математического табу, запрещающего деление на ноль, которое имеет место в этой функции при разложении в ряд Маклорена. Запись функции $f(x) = e^{-1/x^2}$ в виде $f(0) = e^{-1/0^2} = \frac{1}{e^{1/0}} = 0$ не допустима и представляет собой математический криминал. Формально это препятствие закрывает путь для разложения функций содержащих величину $1/x$ и ей подобных в ряд Маклорена. Такое положение в ситуации, когда функция существует и определена, не может считаться нормальным.

Строго говоря, сама попытка раскладывать в ряд функцию, в которой присутствует операция деления на ноль, недопустима изначально.

Адекватная запись степенного ряда в таких случаях получается при помощи подстановки $x = 1/y$. К примеру, функция вида $f(x) = e^{-1/x}$, при подстановке $x = 1/y$ приобретает стандартный вид: $f(x) = F(y) = e^{-y}$ $y = 1/x$
(1)

Эта функция раскладывается в ряд Маклорена:

$$e^{-y} = 1 - \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} - \frac{y^3}{3!} + \dots$$

Возвращение к исходным обозначениям даёт:

$$e^{-1/x} = 1 - \frac{1}{1!x} + \frac{1}{2!x^2} - \frac{1}{3!x^3} + \dots \quad x \neq 0 \quad (2)$$

Ряд (2) воспроизводит функцию $e^{-1/x}$ на всей числовой оси, за исключением точки $x_0 = 0$, в которой функция и ряд не существуют по причине запрета деления на 0. Во всех остальных точках действительной числовой оси ряд существует и адекватно воспроизводит функцию $e^{-1/x}$. Этот ряд не является рядом Маклорена в прямом смысле этого слова, но получен он при помощи ряда Маклорена. В связи с этим ряд (2) можно назвать псевдорядом Маклорена.

Интеграл функции $e^{-1/x}$, как уже отмечалось, находится интегрированием правой и левой частей выражения (2).

Найденные таким образом интегралы от функций $e^{-1/x}$, e^{-1/x^2} , e^{-1/x^3} ... имеют вид:

$$\int e^{-1/x} dx = x - \ln|x| - \frac{1}{2! \cdot 1x} + \frac{1}{3! \cdot 2x^2} - \dots = x - \ln|x| + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)!(n+1)x^{n+1}} \quad x \neq 0$$

$$\int e^{-1/x^2} dx = -\frac{1}{0!(-1)x^{-1}} + \frac{1}{1! \cdot 1x} - \frac{1}{2! \cdot 3x^3} + \frac{1}{3! \cdot 5x^5} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n! \cdot (2n-1)x^{2n-1}} \quad x \neq 0$$

$$\int e^{-1/x^3} dx = -\frac{1}{0!(-1)x^{-1}} + \frac{1}{1! \cdot 2x^2} - \frac{1}{2! \cdot 5x^5} + \frac{1}{3! \cdot 8x^8} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n! \cdot (3n-1)x^{3n-1}} \quad x \neq 0$$

$$\int e^{-1/x^4} dx = -\frac{1}{0!(-1)x^{-1}} + \frac{1}{1! \cdot 3x^3} - \frac{1}{2! \cdot 7x^7} + \frac{1}{3! \cdot 11x^{11}} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n! \cdot (4n-1)x^{4n-1}} \quad x \neq 0$$

Начиная со второго интеграла и далее, можно записать обобщённую формулу: $\int e^{-1/x^{k+1}} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n! \cdot [(k+1)n-1] \cdot x^{(k+1)n-1}} \quad x \neq 0 \quad k = 1, 2, 3, \dots$ (3)

Из обобщённой формулы видно, что ряд при условии $x=0$ не существует, а значит, не существует и интеграл от функции. В то же время, и ряд, и интеграл от функции существует во всех точках числовой оси, кроме точки $x=0$. Для функций вида $e^{1/x}$, e^{1/x^2} , e^{1/x^3} ... интегралы, найденные при помощи такой же подстановки, имеют вид:

$$\int e^{1/x} dx = x + \ln|x| - \frac{1}{2! \cdot 1x} - \frac{1}{3! \cdot 2x^2} - \dots = x + \ln|x| - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!(n+1)x^{n+1}} \quad x \neq 0$$

$$\int e^{1/x^2} dx = -\frac{1}{0!(-1)x^{-1}} - \frac{1}{1! \cdot 1x} - \frac{1}{2! \cdot 3x^3} - \frac{1}{3! \cdot 5x^5} - \dots = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \cdot (2n-1)x^{2n-1}} \quad x \neq 0$$

$$\int e^{1/x^3} dx = -\frac{1}{0!(-1)x^{-1}} - \frac{1}{1! \cdot 2x^2} - \frac{1}{2! \cdot 5x^5} - \frac{1}{3! \cdot 8x^8} - \dots = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(3n-1)x^{3n-1}} \quad x \neq 0$$

$$\int e^{1/x^4} dx = -\frac{1}{0!(-1)x^{-1}} - \frac{1}{1! \cdot 3x^3} - \frac{1}{2! \cdot 7x^7} - \frac{1}{3! \cdot 11x^{11}} - \dots = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(4n-1)x^{4n-1}} \quad x \neq 0$$

Начиная со второго интеграла и далее, можно записать обобщённую формулу: $\int e^{1/x^{k+1}} dx = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n![(k+1)n-1] \cdot x^{(k+1)n-1}} \quad x \neq 0 \quad k = 1, 2, 3, \dots$ (4)

Таким образом, подстановка $x = 1/y$ с последующим использованием ряда Маклорена для новой переменной y позволяет получить степенной ряд, адекватно воспроизводящий первообразную функцию во всей области её существования. Найденные формулы для вычисления интегралов могут иметь большое прикладное значение. Проблемы с подобными функциями возникают лишь в рядах Маклорена, но эти ряды играют исключительно важную роль, как в фундаментальной, так и в прикладной математике. Ряды Маклорена тем и интересны, что они дают разложение в окрестности точки $x_0 = 0$.

Подобные проблемы возникают так же и в классе тригонометрических функций. К примеру, функция $\sin 1/x$ так же, в принципе, не может быть разложена в ряд Маклорена, по той же простой причине, что в точке $x_0 = 0$ функция не существует. Однако, столь же очевидно, что во всех точках числовой оси, кроме точки $x_0 = 0$, она существует и определена. Применяя тот же приём, можно получить её разложение в степенной ряд в виде:

$$\sin \frac{1}{x} = \sin y = \frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} y^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad x = \frac{1}{y} \quad (5)$$

Обратным переходом в выражении (5) получается:

$$\sin \frac{1}{x} = \frac{1}{1!x} - \frac{1}{3!x^3} + \frac{1}{5!x^5} - \frac{1}{7!x^7} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!x^{2n-1}} + \dots \quad (6)$$

Подобным образом можно записать в ряд Маклорена все другие тригонометрические функции от аргумента равного $1/x$. Отсутствие таких разложений в ряд Тейлора не давало возможности получить интегралы от этих функций, о чём свидетельствует их отсутствие в таблицах типовых интегралов.

Разложение в ряд Тейлора функций $\cos \frac{1}{x}, \operatorname{tg} \frac{1}{x}, \operatorname{ctg} \frac{1}{x}, \operatorname{sec} \frac{1}{x}, \operatorname{csc} \frac{1}{x}$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
\cos \frac{1}{x} &= 1 - \frac{1}{2!x^2} + \frac{1}{4!x^4} - \frac{1}{6!x^6} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!x^{2n-2}} + \dots \\
\operatorname{tg} \frac{1}{x} &= \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{2}{15x^5} + \frac{17}{315x^7} + \dots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{(2n)!x^{2n-1}} + \dots \quad \left| \frac{1}{x} \right| < \frac{\pi}{2} \\
\operatorname{ctg} \frac{1}{x} &= x - \frac{1}{3x} - \frac{1}{45x^3} - \frac{2}{945x^5} - \frac{1}{4725x^7} - \dots - \frac{2^{2n}B_n}{2n!x^{2n-1}} - \dots \quad \left| \frac{1}{x} \right| < \pi \quad (7) \\
\operatorname{sec} \frac{1}{x} &= 1 + \frac{1}{2x^2} + \frac{5}{24x^4} + \frac{61}{720x^6} + \dots + \frac{E_n}{(2n)!x^{2n}} + \dots \quad \left| \frac{1}{x} \right| < \frac{\pi}{2} \\
\operatorname{csc} \frac{1}{x} &= x + \frac{1}{6x} + \frac{7}{360x^3} + \frac{31}{15120x^5} + \dots + \frac{2(2^{2n-1}-1)B_n}{(2n)!x^{2n-1}} + \dots \quad \left| \frac{1}{x} \right| < \pi
\end{aligned}$$

Интегрирование выражений (6) и (7) позволяет восполнить этот пробел:

$$\begin{aligned}
\int \sin \frac{1}{x} dx &= \ln x + \frac{1}{2 \cdot 3!x^2} - \frac{1}{4 \cdot 5!x^4} + \frac{1}{6 \cdot 7!x^6} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n \cdot (2n+1)!x^{2n}} + \dots \\
\int \cos \frac{1}{x} dx &= x + \frac{1}{1 \cdot 2!x} - \frac{1}{3 \cdot 4!x^3} + \frac{1}{5 \cdot 6!x^5} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n)!x^{2n-1}} + \dots \\
\int \operatorname{tg} \frac{1}{x} dx &= \ln x - \frac{1}{2 \cdot 3x^2} - \frac{2}{4 \cdot 15x^4} - \frac{17}{6 \cdot 315x^6} - \dots - \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{2n \cdot (2n)!x^{2n}} - \dots \quad (8) \\
\int \operatorname{ctg} \frac{1}{x} dx &= \frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{3} + \frac{1}{2 \cdot 45x^2} + \frac{2}{4 \cdot 945x^4} + \frac{1}{6 \cdot 4725x^6} + \dots \\
\int \operatorname{sec} \frac{1}{x} dx &= x - \frac{1}{2x} - \frac{5}{3 \cdot 24x^3} - \frac{61}{5 \cdot 720x^5} - \dots - \frac{E_n}{(2n-1) \cdot (2n)!x^{2n-1}} - \dots \\
\int \operatorname{csc} \frac{1}{x} dx &= \frac{x^2}{2} + \frac{\ln x}{6} - \frac{7}{2 \cdot 360x^2} - \frac{31}{4 \cdot 15120x^4} - \frac{127}{6 \cdot 604800x^6} - \dots
\end{aligned}$$

Не менее актуальна проблема вычисления интегралов для обратных тригонометрических функций, зависящих от обратного аргумента $1/x$. Сами разложения обратных тригонометрических функций с таким аргументом можно получить методом композиции.

Суть метода композиции состоит в замене в классическом разложении величины аргумента x на величину $1/x$. Полученные таким образом ряды Маклорена для обратных тригонометрических функций записываются в виде выражений (9):

$$\begin{aligned}
\arcsin \frac{1}{x} &= \frac{1}{x} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot x^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot x^7} + \dots \quad \left| \frac{1}{x} \right| < 1 \\
\arccos \frac{1}{x} &= \frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot x^5} + \dots \right) \quad \left| \frac{1}{x} \right| < 1 \\
\operatorname{arc} \operatorname{csc} \frac{1}{x} &= x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots \quad \left| \frac{1}{x} \right| > 1 \quad (9) \\
\operatorname{arc} \operatorname{sec} \frac{1}{x} &= \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots \right) \quad \left| \frac{1}{x} \right| > 1 \\
\operatorname{arctg} \frac{1}{x} &= \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{7x^7} + \dots \quad \left| \frac{1}{x} \right| < 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{arctg} \frac{1}{x} &= \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \dots & \frac{1}{x} > 1 \\
\operatorname{arctg} \frac{1}{x} &= -\frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \dots & \frac{1}{x} < -1 \\
\operatorname{arcctg} \frac{1}{x} &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \dots & \left| \frac{1}{x} \right| < 1 \\
\operatorname{arcctg} \frac{1}{x} &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots & \frac{1}{x} > 1 \\
\operatorname{arcctg} \frac{1}{x} &= \pi + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots & \frac{1}{x} < -1
\end{aligned}$$

Интегрируя правые и левые части выражений (9), получим соответствующие интегралы, найденные с помощью рядов:

$$\begin{aligned}
\int \arcsin \frac{1}{x} dx &= \ln x - \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 3x^2} - \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5x^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{6 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7x^6} - \dots \\
\int \arccos \frac{1}{x} dx &= \frac{\pi \cdot x}{2} - \ln x + \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 3x^2} + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5x^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{6 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7x^6} \dots \\
\int \operatorname{arccsc} \frac{1}{x} dx &= \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3x^6}{6 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5x^8}{8 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots \\
\int \operatorname{arcsec} \frac{1}{x} dx &= \frac{\pi \cdot x}{2} - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3x^6}{6 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5x^8}{8 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots \right) \\
\int \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx &= \ln x + \frac{1}{2 \cdot 3x^2} - \frac{1}{4 \cdot 5x^4} + \frac{1}{6 \cdot 7x^6} - \frac{1}{8 \cdot 9x^8} + \dots \quad \left| \frac{1}{x} \right| < 1 \\
\int \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx &= \frac{\pi \cdot x}{2} - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} - \frac{x^6}{5 \cdot 6} + \frac{x^8}{7 \cdot 8} - \frac{x^{10}}{9 \cdot 10} + \dots \quad \frac{1}{x} > 1 \\
\int \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx &= -\frac{\pi \cdot x}{2} - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} - \frac{x^6}{5 \cdot 6} + \frac{x^8}{7 \cdot 8} - \frac{x^{10}}{9 \cdot 10} + \dots \quad \frac{1}{x} < -1 \\
\int \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} dx &= \frac{\pi \cdot x}{2} - \ln x - \frac{1}{2 \cdot 3x^2} + \frac{1}{4 \cdot 5x^4} - \frac{1}{6 \cdot 7x^6} + \dots \quad \left| \frac{1}{x} \right| < 1 \\
\int \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} dx &= \frac{x^2}{1 \cdot 2} - \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^6}{5 \cdot 6} - \frac{x^8}{7 \cdot 8} + \dots \quad \frac{1}{x} > 1 \\
\int \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} dx &= \pi \cdot x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^6}{5 \cdot 6} - \frac{x^8}{7 \cdot 8} + \dots \quad \frac{1}{x} < -1
\end{aligned} \tag{10}$$

Все полученные интегралы, вычислены с помощью обратного аргумента $y = 1/x$ путём перехода к типовым функциям и разложениям их в типовые ряды с последующим их интегрированием.

Подобную замену аргумента можно производить и в других случаях, как, например, $y = 1/x^k$, $y = 1/\sin x$, $y = 1/\operatorname{tg} x$. Следует помнить о необходимости исследования сходимости найденных рядов, через которые выражены полученные интегралы.

Литература

1. Алексеева Е.Е, Лушников Е.М. Проблемы и решения в теории рядов. - Калининград.: Янтарный сказ, 2004. - 256с.